Michael Naylor

Vedvarende mønstre

Pascals talltrekant er en av de mest berømte trekanter vi kjenner til. Denne trekanten er full av spennende mønstre. Talltrekanten ble studert av kinesiske og persiske matematikere lenge før den ble gjenoppdaget av Blaise Pascal in 1654, men den ble gitt Pascals navn på grunn av de mange vidunderlige egenskaper han fant og beviste. I dag lar matematikkinteresserte seg begeistre av mulighetene til å utforske de mange mønstrene i trekanten – til og med skjulte mønstre utenfor trekanten!

Talltrekanten blir vanligvis presentert med 1 i øverste rad og 1-tall nedover ytterst til venstre og ytterst til høyre. Tallene inne i trekanten blir funnet ved å summere de to tallene som befinner seg i raden over – nærmest til venstre og til høyre. I figur 1 ser vi noen få rader.

I den nederste raden er for eksempel 6 summen av 1 og 5 fra raden ovenfor, mens 15 er summen av 5 og 10 osv. Ved å fortsette på denne måten kan vi generere tall i uendelig mange rader nedover.

Michael Naylor
Matematikksenteret
mike.naylor@matematikksenteret.no

Artikkelen er oversatt fra engelsk av
Tor Andersen
Matematikksenteret
tor.andersen@matematikksenteret.no

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

Figur 1: Pascals trekant

Pascals talltrekant kan blant annet bli benyttet til å utvikle uttrykk av typen $(a + b)^n$. Den n-te raden i talltrekanten (merk at øverste rad er nummer null) består nemlig av koeffisientene til uttrykket vi får når vi utvider $(a + b)^n$. Eksempelvis har vi at

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Koeffisientene 1, 4, 6, 4, og 1 finner vi altså i fjerde rad i talltrekanten.

Vi kan også bruke Pascals talltrekant til å finne antall kombinasjoner. Tallet som står i r-te kolonne i n-te rad forteller oss på hvor mange måter vi kan trekke r objekter fra n objekter uten tilbakelegging. Antall kombinasjoner og tallet i trekanten kan regnes ut ved hjelp av $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. På kalkulatorer bruker vi kommandoen *nCr*. Antall lottorekker finner vi altså ved *nCr*(34, 7), som viser seg å være 5 379 616. Dette svære tallet finner vi altså i 34. rad og 7. kolonne i Pascals talltrekant.

Vi oppdager ganske fort at summen av alle tallene i n-te rad er 2^n. Hundrevis av mønstre ligger og venter på den nysgjerrige.

En helt ny verden

Mange av mønstrene i talltrekanten er relativt godt kjent blant dem som har arbeidet med trekanten. Men hva med «den skjulte verden» med «negative rader» som åpenbarer seg når vi utvider talltrekanten oppover istedenfor nedover?

For å oppnå dette må vi først utvide trekanten til venstre og høyre. Dette gjør vi ved å følge regelen om at hvert tall i en rad er summen av de nærmeste tallene i raden over. Det er ganske opplagt at vi får 0 på flankene.

0		0		0		**1**		0		0		0
	0		0		**1**		**1**		0		0	
0		0		**1**		**2**		**1**		0		0
	0		**1**		**3**		**3**		**1**		0	

For å konstruere rad nummer –1 må vi sørge for at hvert par av tall i denne raden er summen av korresponderende tall i rad 0. Vi kunne for eksempel plassere 1/2 og 1/2 over 1-tallet i rad 0, eller 10 og –9 eller et hvilket som helst tallpar med sum lik 1. Men for å oppfylle at det første tallet forskjellig fra 0 skal være 1, må vi velge 0 og 1 som sentraltall i rad nummer –1.

Straks vi har plassert 0 og 1 i rad nummer –1, følger det at denne raden må inneholde alternerende 1 og –1. Da blir summen som er tallet i raden nedenfor, lik 0, slik det skal være.

	0		0		0		**1**		**–1**		**1**		**–1**
0		0		0		**1**		0		0		0	
	0		0		**1**		**1**		0		0		0
0		0		**1**		**2**		**1**		0		0	

Noe ekstraordinært begynner etter hvert å hende. Mysteriet forsterker seg når vi generer rad nummer –2 og finner at denne inneholder elementene … 0, 1, –2, 3, –4, 5, … Fortsetter vi på denne måten, vil en «usynlig» verden av tall komme til syne (se figur 1).

En ny talltrekant ser dagens lys. Den kan bli oppfattet som et speilbilde av den nedre trekanten, men med alternerende positive og negative tall. Mange egenskaper gjelder både for den nedre og øvre talltrekanten – slik som:

– Det første tallet (posisjon 0) i hver rad er 1
– Det andre tallet (posisjon 1) i rad n er lik n
– Det tredje tallet (posisjon 2) i rad n er trekanttallet $n(n-1)/2$. Legg merke til at dette kvadratiske uttrykket vil generere kun positive tall og at det er to nuller i raden hvor $n=0$ og $n=1$.
– Det fjerde tallet (posisjon 3) i rad n er pyramidetallet $n(n-1)(n-1)/6$. Legg merke til at dette kubiske uttrykket er lik

										1		–6		21		–56		126	
									1		–5		15		–35		70		–126
								1		–4		10		–20		35		–56	
							1		–3		6		–10		15		–21		28
						1		–2		3		–4		5		–6		7	
					1		–1		1		–1		1		–1		1		–1
				1		0		0		0		0		0		0		0	
			1		**1**		0		0		0		0		0		0		0
		1		**2**		**1**		0		0		0		0		0		0	
	1		**3**		**3**		**1**		0		0		0		0		0		0
1		**4**		**6**		**4**		**1**		0		0		0		0		0	

Figur 1

0 for $n = 0$, 1, og 2. For $n < 0$ har dette uttrykket en negativ verdi.

Vi innser at tallet i rad n og i posisjon r er gitt ved $\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$. Dette uttrykket er lik $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, men vi velger den første skrivemåten for å unngå fakultet av negative tall.

Egenskaper ved de negative radene

Det kan være en fascinerende aktivitet å prøve å finne egenskaper til talltrekanten med de negative radene. Gir de negative radene koeffisientene vi får når vi utvider $(a + b)^n$? Er summen av tallene i rad n fortsatt lik 2^n? Grundig analyse av disse spørsmålene fører til overraskende svar. La oss først se på $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Legg merke til at a i første ledd er opphøyd i n og at b er opphøyd i 0. I påfølgende ledd vil eksponenten til a avta med 1 for hvert ledd til den blir lik 0. Eksponenten til b vil øke med 1 for hvert ledd til den blir n.

Hva så med $n = -1$? Dukker koeffisientene i $(a + b)^{-1}$ opp i de negative radene? La oss utvikle ved hjelp av divisjonen:

$$1:(a+b) = a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + a^{-5}b^4 - \ldots$$

$$\begin{array}{l}
\underline{1 + a^{-1}b} \\
\quad -a^{-1}b \\
\quad \underline{-a^{-1}b - a^{-2}b^2} \\
\qquad\qquad a^{-2}b^2 \\
\qquad\qquad \underline{a^{-2}b^2 - a^{-3}b^3} \\
\qquad\qquad\qquad -a^{-3}b^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-a^{-3}b^3 - a^{-4}b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a^{-4}b^4 \ldots
\end{array}$$

Vi kan kontrollere divisjonen ved å multiplisere kvotienten med divisor og undersøke om svaret blir lik dividenden, nemlig 1. Altså:

$$\begin{aligned}
&(a+b)\cdot(a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + \ldots) \\
&= a\,(a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + \ldots) \\
&\quad + b\,(a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + \ldots) \\
&= (1 - a^{-1}b + a^{-2}b^2 - a^{-3}b^3 + a^{-4}b^4 - \ldots) \\
&\quad + (a^{-1}b - a^{-2}b^2 + a^{-3}b^3 - a^{-4}b^4 + \ldots) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ja, som vi kunne forvente. Koeffisientene vi får når vi utvider $(a + b)^{-1}$ er 1, –1, 1, –1, 1, …

Hvis $a = b = 1$ får vi opplagt at $(1 + 1)^{-1} = 2^{-1} = 1/2$. Resultatet ovenfor gir faktisk samme svar. Da får vi nemlig at

$$(1 + 1)^{-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 1/2.$$

Men hvordan i all verden kan det være tilfelle? Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), en av grunnleggerne av differensialregningen, hadde mye moro med denne rekken. Leibniz trodde på «vedvarende mønstre». Vil et mønster bestå selv om vi foretar oss ett eller annet, slik vi har gjort med å utvide Pascals talltrekant oppover?

Leibniz bemerket at summen kan grupperes slik:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \ldots = 0.$$

Eller slik:

$$1 + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Istedenfor å drukne seg i dette paradokset, foreslo Leibniz at siden summen er 0 for de n første leddene når n er et oddetall og 1 når n er et partall, må den forventede sum i den uendelige rekken være 1/2.

Spøkte Leibniz med omgivelsene sine? Han fortsatte argumentasjonen med at

$$\begin{aligned}
&S = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \;\Rightarrow\; S = 1 - S \\
&\quad\Rightarrow\; 2S = 1 \;\Rightarrow\; S = 1/2.
\end{aligned}$$

Dessuten er den uendelige rekken $1 - 1 + 1 - \cdots$ en geometrisk rekke med $a_1 = 1$ og $k = -1$. Kan vi for en gangs skyld ignorere kravet om at $|k| < 1$ og sette $s = \frac{a_1}{1-k} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$?

Til slutt – en kvikk divisjon bekrefter resultatet:

$$
\begin{array}{l}
1:(1+1)=1-1+1-1+\ldots \\
\underline{1+1} \\
\quad -1 \\
\quad \underline{-1-1} \\
\qquad\quad 1\ldots
\end{array}
$$

Rad nummer –1 gir altså ikke bare koeffisientene i $(a + b)^{-1}$, men i tillegg «summen» av tallene i raden. Kan dette gjelde for n-te rad?

Rad –2 ser litt mer arbeidsom ut. Er det mulig at den uendelige summen 1 – 2 + 3 – 4 + 5 – … er lik $2^{-2} = 1/2^2 = 1/4$? Og er koeffisientene 1, –2, 3, –4, 5, …?

Siden $(a+b)^{-2} = \dfrac{1}{(a+b)^2} = \dfrac{1}{a^2+2ab+b^2}$, kan vi utføre en polynomdivisjon. Kvotienten produserer virkelig de koeffisientene som vi håpet at vi skulle få. La oss utføre samme type divisjon på 1 : (1 + 2 + 1). Da får vi:

$$
\begin{array}{l}
1:(1+2+1)=1-2+3-4+5-\ldots \\
\underline{1+2+1} \\
\quad -2-1 \\
\quad \underline{-2-4-2} \\
\qquad\quad 3+2 \\
\qquad\quad \underline{3+6+3} \\
\qquad\qquad -4-3 \\
\qquad\qquad \underline{-4-8-4} \\
\qquad\qquad\qquad 5+4\ \ldots
\end{array}
$$

På samme måten kan vi regne ut 1 : (1 + 3 + 3 + 1) ved divisjon for å produsere tallene i rad –3 i Pascals talltrekant. Polynomdivisjonen produserer elementene i den generelle raden $-n$. En uventet og deilig overraskelse!

Kommentar

Vi må alltid være forsiktige når vi arbeider med uendelighet slik at vi unngår paradokser. I denne framstillingen har vi kanskje vært litt uforsiktig og lekende med vår håndtering av uendelige rekker og summer, men det er klart at Leibniz sin tro på «vedvarende mønstre» er rettferdiggjort. Ved å følge disse mønstrene kan vi havne i en merkelig og spennende verden. Hvilke andre sammenhenger ligger og venter på å bli oppdaget i de skjulte radene utenfor Pascals talltrekant?

Referanse

Rhodes, F. (1971). 1 – 1 + 1 –1 + ⋯ = 1/2? *Mathematical Gazette, 55*(392), 298–305.