Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Andre runde 2024–2025 – *Løsninger*

16. januar 2025

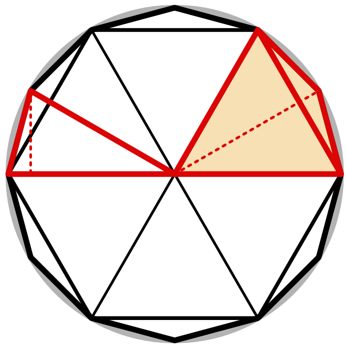
Oppgave 1. Hvis det ikke var for kravet om minst én bokstav og ett tallsiffer, var svaret enkelt nok: Det er $16^8 = (2^4)^8 = 2^{32}$ muligheter. Vi må trekke fra de $8^8 = (2^3)^8 = 2^{24}$ passordene som består av bare bokstaver og like mange som består av bare tallsiffer. Tilsammen er det $2^{32} - 2 \cdot 2^{24} = 2^{32} - 2^{25} = 2^{25}(2^7 - 1) = 2^{25} \cdot 127$ muligheter. **127**

Oppgave 2. Én av klassene får to lærere, mens resten får én lærer hver. Vi kan telle opp slik: Først velger vi hvilken klasse skal ha to lærere (fire muligheter). Så velger vi hvilke to lærere den klassen skal ha ($\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ muligheter). Så fordeler vi de tre øvrige lærerne på de tre øvrige klassene ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ muligheter). I alt er det $4 \cdot 10 \cdot 6 = 240$ muligheter. **240**

Oppgave 3. Vi tar summen av de to første sifrene i hvert av tallene først: Den blir $100 \cdot (1 + 9) + 26 \cdot (2 + 0) = 1052$. Så tar vi siste siffer i tallene som starter på 19: Her forekommer hvert av sifrene 0, 1, …, 9 ti ganger hver, så summen blir $10 \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 9) = 10 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 450$. Det samme gjelder nest siste siffer. Så tar vi siste siffer i tallene som starter med 20: Summen blir $2 \cdot (0 + 1 + \cdots + 9) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 2 \cdot 45 + 15 = 105$. Og summen av nest siste siffer i disse tallene blir $10 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 22$. Alle sifrene til sammen får sum $1052 + 450 + 450 + 105 + 22 = 2079$, som er delelig med 3.

Alternativ løsning, for de som er kjent med modulo-regning og gjetter på at svaret er 3: Husk at tverrsummen til et tall er kongruent med tallet selv, modulo 9 – og derfor også modulo 3. Summen av tre påfølgende tall er kongruent med 0 modulo 3, siden $k + (k+1) + (k+2) = 3(k+1)$. Og da gjelder det samme for summen av tverrsummene til disse tallene. Siden det er $126 = 3 \cdot 42$ tall fra og med 1900 til og med 2025, er summen av tverrsummen til alle disse tallene også kongruent med 0 modulo 3. . . . . **3**

Oppgave 4. Dersom a og b er gitt, er også c entydig gitt, så vi trenger bare telle par (a, b) med $a^3 + b^2 < 100$. Fordi $5^3 = 125 > 100$, må $a \leq 4$. Dersom $a = 4$ skal $b^2 < 100 - 4^3 = 36$ (5 muligheter). Og $a = 3$ krever $b^2 < 100 - 3^3 = 73$ (8 muligheter). Med $a = 2$ må $b^2 < 100 - 2^3 = 92$ (9 muligheter), mens $a = 1$ gir $b^2 < 100 - 1^3 = 99$ (også 9 muligheter). Tilsammen $5 + 8 + 9 + 9 = 31$ muligheter. **31**



Oppgave 5. Innskriv en regulær sekskant ved å forbinde annethvert hjørne i tolvkanten. Sekskanten er satt sammen av seks likesidede trekanter, alle med sidekant 12. Del tolvkanten i seks like deler. Én av dem er skyggelagt i figuren. Den er satt sammen av to trekanter med en felles side (en sekskantside). Høydene til de to trekantene over den felles siden er tilsammen lik 12, så arealene av de to summerer seg til $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72$. Arealet av hele tolvkanten blir $6 \cdot 72 = 432$.

Alternativ løsning: Del opp tolvkanten i tolv likebente trekanter, hver med toppvinkel 30° og to sidekanter av lengde 12. En av dem er vist i figuren med rødt omriss i venstre halvdel av figuren. Høyden i trekanten (stiplet) er 6, siden den er den korte kateten i en 30-60-90-trekant med hypotenus 12. Så arealet er $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 6 = 36$, og hele tolvkanten har areal $12 \cdot 36$. **432**

Oppgave 6. Skriv $m = x^2$ der x er et positivt heltall. Vi skal ha $x^2 - 1001 = y^2$, der også y er et positivt heltall. (Merk at om y gjøres mindre, er også x mindre.) Skriv om til $(x + y)(x - y) = 1001$. Altså $x - y = a$, $x + y = b$ der a og b er heltall med $0 < a < b$ og $ab = 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$. Da er også $2x = a + b$ og $2y = b - a$. Så y, og dermed x, blir minst mulig når de to faktorene a og b er så nær hverandre som mulig, med andre ord a størst mulig. Det skjer med $a = 13$ og $b = 7 \cdot 11 = 77$, som gir $y = \frac{1}{2}(b - a) = 32$, dermed $m = x^2 = 1001 + 32^2 = 2025$. **9**

Faktoriseringen av 1001 er ikke så vanskelig å gjette, hvis du kjenner testen for delbarhet med 11: Ta alternerende tverrsum, det vil si summen av annethvert siffer i tallet minus summen av de øvrige sifrene. Hvis resultatet er delelig med 11, er også det opprinnelige tallet delelig med 11. Slik ser du med en gang at 1001 er delelig med 11, og så regner du ut $1001/11 = 91 = 7 \cdot 13$.

Oppgave 7. Identiteten $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ kan skrives om til $1/(a+1) = (a-1)/(a^2-1)$. Med $a = \sqrt[2n]{7}$ gir det

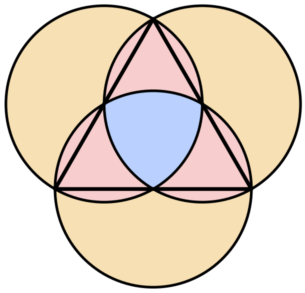
$$\frac{1}{\sqrt[2n]{7}+1} = \frac{\sqrt[2n]{7}-1}{\sqrt[n]{7}-1}.$$

Sett inn $n = 1$, 2, 4, 8 og 16, og multipliser sammen alle ligningene. Om vi kaller den store brøken i oppgaven x, blir da

$$x = 6 \cdot \frac{\sqrt[2]{7}-1}{\sqrt[1]{7}-1} \cdot \frac{\sqrt[4]{7}-1}{\sqrt[2]{7}-1} \cdot \frac{\sqrt[8]{7}-1}{\sqrt[4]{7}-1} \cdot \frac{\sqrt[16]{7}-1}{\sqrt[8]{7}-1} \cdot \frac{\sqrt[32]{7}-1}{\sqrt[16]{7}-1} = \sqrt[32]{7} - 1$$

(merk at $\sqrt[1]{7} - 1 = 7 - 1 = 6$). Dermed er $(x+1)^{96} = 7^{96/32} = 7^3 = 343$. . **343**

Oppgave 8. Her er figuren i oppgaven igjen: I tillegg til arealet A_1 (beige) og A_3 (lyseblått) har vi fargelagt arealet A_2 i lyserødt. Det består av de punktene som er innenfor to av sirklene, men ikke alle tre.



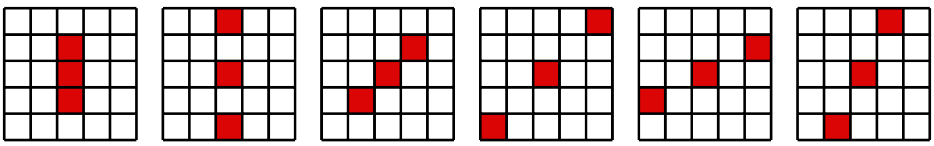
Om vi adderer arealene til de tre sirklene, har vi fått med A_1 én gang, A_2 to ganger, og A_3 tre ganger. Dermed er $A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 3 \cdot \pi \cdot 3^2 = 27\pi$.

Figuren som helhet består av tre halvsirkler (totalt areal $\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{27}{2}\pi$) og den gitte trekanten, med sidekant 6 og høyde $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$, altså areal $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$. Men dette arealet er også summen av de tre fargede områdene: $A_1 + A_2 + A_3 = \frac{27}{2}\pi + 9\sqrt{3}$.

Tar vi to ganger denne ligningen og trekker fra ligningen i andre avsnitt, får vi $A_1 - A_3 = 18\sqrt{3}$. Så blir $(A_1 - A_3)^2 = (18\sqrt{3})^2 = 972$. **972**

Oppgave 9. Siden vi må telle på to forskjellige måter, trenger vi litt terminologi for unngå forvirring. La oss kort og godt kalle et utvalg på tre av de 25 rutene i rutenettet et *trippel*. Vi regner to tripler som forskjellige selv om det ene er resultat av å rotere det andre. Det er i alt $\frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 25 \cdot 4 \cdot 23$ tripler. Men det oppgaven spør etter, kan vi kalle *mønstre*: Ethvert trippel gir et mønster, men om vi roterer et mønster, regner vi resultatet som det samme mønsteret.

Når vi roterer brettet med et trippel 90°, 180°, 270° eller 0°, får vi altså bare ett mønster, men normalt fire tripler. Unntaket er symmetriske tripler: De må inneholdet midtruten, pluss ett par av ruter der den ene kommer fra den andre ved å rotere brettet 180°. (Ingen tripler er symmetrisk med hensyn på en 90° rotasjon, for det krever fire fargelagte ruter.) Det er i alt $\frac{24}{2} = 12$ symmetriske par, altså 12 symmetriske tripler, som gir opphav til $\frac{12}{2} = 6$ mønstre. Her er de: Merk at de to siste er forskjellige mønstre, for det ene kan ikke roteres til det andre. De er i stedet speilbilder av hverandre.



Alle de øvrige $4 \cdot 25 \cdot 23 - 12$ triplene gir så $\frac{25 \cdot 4 \cdot 23 - 12}{4} = 25 \cdot 23 - 3 = 572$ mønstre. I alt har vi da $572 + 6 = 578$ mønstre. **578**

Oppgave 10. Om det tosifrede tallet er x og det tresifrede tallet er y, så er $9xy = 1000x+y$. Skriv det som $(9y-1000)x = y$, altså $zx = y$ der $z = 9y-1000$. Erstatter vi så y med zx i den første ligningen, får vi $9x^2z = 1000x + zx$, som vi forkorter med x og skriver om til $(9x-1)z = 1000$. Med andre ord: $z \mid 1000$. (Notasjonen er kort for at z deler (går opp i) 1000.) Men vi kan også skrive $9xz - z = 999 + 1$, eller bedre $z + 1 = 9 \cdot (xz - 111)$, det vil si at vi kan skrive $z = 9k - 1$ for et heltall k.

Vi kan også utnytte at $y < 1000$ og $x \geq 10$, slik at $z = y/x < 1000/10 = 100$, og dermed $k \leq 11$. Det er bare ett valg av k med $1 \leq k \leq 11$ som gir $9k - 1 \mid 1000$, nemlig $k = 1$. Det gir $z = 8$, $y = (1000 + z)/9 = 1008/9 = 112$, $x = y/z = 14$, og $x + y = 126$. En kontrollregning viser ganske riktig at $9 \cdot 14 \cdot 112 = 14112$. **126**