Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2024–2025

18. mars 2025 (bokmål)

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (åtte punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Tillatte hjelpemidler er kladdepapir, tospråklige ordbøker og skrivedskaper inklusive passer og linjal, men ikke gradskive.

Oppgave 1

a. Peer og Solveig spiller et spill med n mynter som alle viser M på den ene siden og K på den andre. Myntene ligger på rad på bordet. Peer og Solveig trekker annenhver gang. I sitt trekk kan Peer snu én eller flere mynter, så lenge han ikke snur to mynter som ligger inntil hverandre. I sitt trekk snur Solveig nøyaktig to mynter som ligger inntil hveranre. Til å begynne med viser alle myntene M. Peer starter spillet, og vinner dersom alle myntene på noe tidspunkt viser K samtidig. For hvilke $n \geq 2$ kan Solveig hindre Peer fra å vinne?

b. I Andeby finnes en vandrepokal med påskriften «Andebys beste barn». Hver innbygger i Andeby har en ikke-tom liste (som aldri endres) over noen andre innbyggere i Andeby. Den som mottar vandrepokalen, får beholde den én dag, og gir den videre til en person på sin liste neste dag. Gregers har selv hatt vandrepokalen før. Det viser seg at hver gang han får den, er han garantert å få den igjen nøyaktig 2025 dager senere (men kanskje før den tid, i tillegg). Hedvig fikk pokalen i dag. Bestem alle heltall $n > 0$ som er slik at vi kan være *helt sikre* på at hun ikke kan få pokalen igjen om n dager, gitt opplysningene over.

Oppgave 2

a. En lærer ber hver av elleve elever skrive et positivt heltall med høyst fire siffer på hver sin gule klistrelapp. Vis at dersom alle tallene er forskjellige, kan læreren alltid velge ut to eller flere av de elleve lappene slik at gjennomsnittet av tallene på de valgte lappene ikke er et heltall.

b. Hvilke positive heltall a er slik at $n! - a$ er et kvadrattall for uendelig mange positive heltall n?

Oppgave 3

a. I trekanten ABC er E fotpunktet til høyden fra B, og F er fotpunktet til høyden fra C. Normalene til linjen EF gjennom B og C skjærer EF i henholdsvis P og Q. Vis at $EP = FQ$.

b. En spissvinklet trekant ABC har omsenter O. Linjene AO og BC skjærer i D, mens BO og CA skjærer i E, og CO og AB skjærer i F. Vis at dersom trekantene ABC og DEF er formlike (med hjørnene i den rekkefølgen), er ABC likesidet.

Oppgave 4

a. Finn alle polynomer P med reelle koeffisienter som tilfredsstiller

$$P\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1+P(x)}$$

for alle reelle tall $x \neq -1$.

b. Bestem det største reelle tallet C som er slik at

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \geq C$$

for alle reelle tall $x, y, z \neq 0$ som oppfyller ligningen

$$\frac{x}{yz} + \frac{4y}{zx} + \frac{9z}{xy} = 24.$$