# Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
# Finale 2024–2025 – *Løsninger*

18. mars 2025

**Oppgave 1.**

**a.** Først observerer vi at dersom ingen nabopar viser MM når Peer står for tur, vinner Peer umiddelbart ved å snu alle mynter som viser M. I motsatt fall får han selvsagt ikke til det.

Peer kan alltid vinne tilfellene $n = 2$, 3 og 4:

| | $n = 2$ | $n = 3$ | $n = 4$ |
|---|---|---|---|
| start | MM | MMM | MMMM |
| P: | MK | KMK | KMMK |
| S: | KM | MKK | MKMK |
| P: | KK | KKK | KKKK |

Tabellen viser de første tre trekkene i et typisk spill for $n = 2, 3$ og 4. Rød farge markerer myntene som er snudd i trekket. For $n = 3$ og $n = 4$ kan Solveig også snu de to siste myntene, med tilsvarende resultat, bare speilvendt. (Om hun snur de to midterste når $n = 4$, taper hun umiddelbart.) I alle tilfellene vinner Per.

Derimot kan Solveig hindre Peer fra å vinne dersom $n \geq 5$. Alt hun trenger, er å alltid sørge for et nabopar MM etter sitt trekk. Det kan hun, dersom myntrekken inneholder ett av mønstrene MM, KK, eller MKM: I det første tilfellet snur hun et annet par og lar MM urørt; i det andre tilfellet snur hun KK; i det tredje tilfellet snur hun MKM til KMM. Enhver myntrekke med $n \geq 4$ inneholder minst ett av disse mønstrene. (Men hun trenger $n \geq 5$ for å håndtere det første tilfellet.)

**b.** Det er nyttig å bruke noen enkle begreper fra grafteori. Vi kan tenke oss å liste alle innbyggerne i Andeby på et digert papirark. Så tegner vi en pil fra innbygger $A$ til innbygger $B$ dersom $B$ står på $A$'s liste. Resultatet er en *rettet graf*, der innbyggerne konvensjonelt kalles *noder*. En *vei* i grafen består av en rekke noder $A_0, \ldots, A_n$ der grafen har en pil fra $A_{i-1}$ til $A_i$ for $i = 1, \ldots, n$. Veien kalles *enkel* om alle nodene i den er distinkte, med mulig unntak av den første og siste, som kan være like. I så fall kalles veien *lukket*. En enkel, lukket vei kalles en *løkke*.

Siden historien i oppgaven handler om noe som skjer etter at Gregers har hatt vandrepokalen, kan vi se bort fra alle som ikke kan nås via en vei som starter med Gregers: Så vi fjerner like godt alle de fra grafen.

Nå ser vi at enhver løkke i grafen må inneholde Gregers, for ellers kunne pokalen vandre rundt til evig tid uten at Gregers får den igjen.

Videre må lengden av enhver løkke i grafen gå opp i 2025, siden pokalen ellers kunne følge løkken igjen og igjen, uten at Gregers får den tilbake eksakt hver 2025-te dag.

Til sist ser vi at alle løkker må ha samme lengde. For anta at to løkker har lengder henholdsvis $m$ og $n$, la oss si med $m < n$ (så $m < 2025$). Da kunne pokalen følge den korteste løkken $2025/m - 1$ ganger, etterfulgt av én gang rundt den lange løkken, slik at Gregers får den igjen på dag $2025 - m$ og neste gang på dag $2025 - m + n$ etter han hadde den først, og da får han den jo ikke på dag 2025. La nå $\ell > 1$ være den felles lengden på alle løkker.

Vi konkluderer at alle i Andeby (unntatt de vi tok ut), deriblant Hedvig, er med i en løkke av lengde $\ell$, og derfor får pokalen hver $\ell$-te dag. Fordi $\ell > 1$ og $\ell \mid 2025$, er $\ell$ et heltallig multiplum av enten 3 eller 5. Så Hedvig kan helt sikkert ikke få pokalen $d$ dager etter at hun hadde den sist, hvis ikke $d$ er et multiplum av 3 eller 5. Men alle multipler av 3 eller 5 er ellers mulige ut fra det vi er blitt fortalt (hvis $\ell = 3$ eller $\ell = 5$).

**Oppgave 2.**

**a.** Anta at alle utvalg av de elleve tallene har heltallig gjennomsnitt. Det må bety at $a_1 + \cdots + a_n \equiv 0 \pmod{n}$ for ethvert utvalg $a_1, \ldots, a_n$ blant tallene. Dersom $n < 11$ kan vi bytte ut $a_n$ med et av de øvrige tallene, la oss si $a'_n$. Så er også $a_1 + \cdots + a_{n-1} + a'_n \equiv 0 \pmod{n}$. Trekker vi så de to ligningene fra hverandre, følger at $a_n - a'_n \equiv 0 \pmod{n}$. Med andre ord er alle de elleve tallene kongruente modulo $n$, for alle $n < 11$. Fra det kinesiske restleddsteoremet følger at om to tall er kongruente modulo to (eller flere) innbyrdes primiske tall, er de også kongruente modulo produktet. Altså er alle tallene på de gule lappene kongruente modulo $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2520$. De har altså alle formen $k + 2520j$, med samme $k$ ($0 \le k < 2025$) og forskjellig $j$. Siden hvert tall har høyst fire siffer, er $j < 4$, så de elleve tallene kan ikke være forskjellige.

Her har vi bare brukt entydighetsdelen av det kinesiske restleddteoremet, som er den enkleste biten: Om $x \equiv y \pmod{m}$ og $x \equiv y \pmod{n}$ der $m$ og $n$ er innbyrdes primiske, er også $x \equiv y \pmod{mn}$. Bevis: La $z = x - y$. Så er $z = im = jn$ for heltall $i$ og $j$. Men da vil $n \mid im$, og siden $m$ og $n$ er innbyrdes primiske, følger at $n \mid i$, det vil si $i = kn$. Så $z = kmn$, og beviset er komplett. Tilfellet med flere enn to moduluser følger ved induksjon.

**b.** Anta at $a$ oppfyller betingelsen i oppgaven. Det vil si at det finnes uendelig mange par $(n, k)$ av positive heltall med $n! = a + k^2$. En konsekvens av det, er at $a$ oppfyller en betingelse vi kan kalle betingelse Q:

$$\text{Gitt et positivt heltall } q \text{, finnes et positivt heltall } k \text{ slik at } q \mid (a + k^2). \tag{Q}$$

Først viser vi at dersom $a$ oppfyller betingelse Q og $p \mid a$ for et primtall $p$, så vil $p^2 \mid a$, og $a/p^2$ oppfyller betingelse Q. For å vise det, lar vi $q$ være et positivt heltall, og velger et positivt heltall $k$ slik at $p^2 q \mid a + k^2$. Spesielt vil $p \mid a + k^2$, og siden $p \mid a$, følger at $p \mid k^2$, og derfor $p \mid k$, siden $p$ er primtall. Men nå kan vi dividere relasjonen $p^2 q \mid a + k^2$ med $p^2$, altså $q \mid a/p^2 + (k/p)^2$, og påstanden er bevist.

Ved induksjon følger nå at om $p^r$ er høyeste potens av $p$ med $p^r \mid a$, så er $r$ et partall, og $a/p^r$ har egenskap Q. Spesielt er $a$ et kvadrattall.

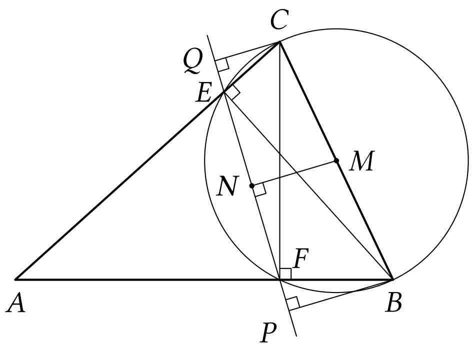
Gjennomfører vi så prosedyren over for alle primfaktorer $p$ til $a$, ender vi opp med at 1 har egenskap Q. Spesielt finnes et positivt heltall $k$ slik at $3 \mid 1 + k^2$, men det er umulig, siden et kvadrat aldri er kongruent med 2 modulo 3.

Eller, i enklere språk: Skriv $k = 3i + j$ med $j \in \{0, 1, 2\}$. Så er $1 + k^2 = 9i^2 + 6ij + j^2 + 1$, men $j^2 + 1 \in \{1, 2, 5\}$ er ikke delelig med 3.

Heller enn å redusere $a$ til 1, kunne vi nøyd oss med å se på $a' = a/3^r$, med $3 \nmid a'$.

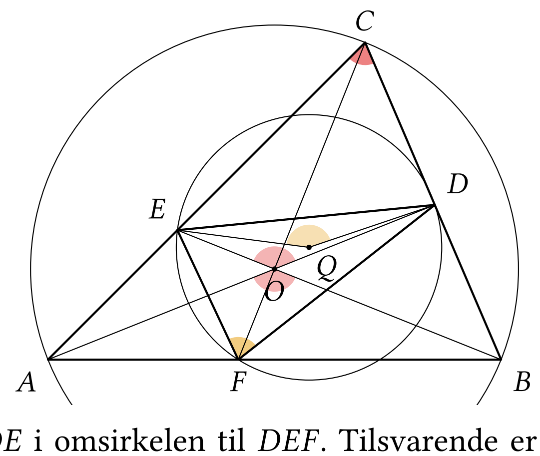
**Oppgave 3.**

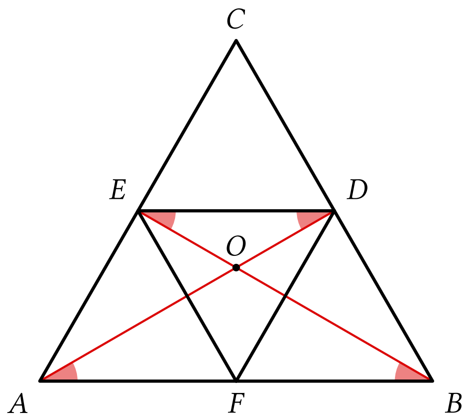
**a.** La $M$ være midpunktet på side $BC$ i trekanten. En linje fra $M$ ortogonalt på $PQ$ treffer $PQ$ i et punkt $N$, som må være midtpunktet til linjestykket $PQ$. Trekk sirkelen med $BC$ som diameter. Ettersom vinklene $BEC$ og $BFC$ rette, ligger $E$ og $F$ på denne sirkelen, slik at $EF$ er en korde til sirkelen. Men da må $N$ også være midtpunktet på $EF$, og resultatet følger fra symmetrien om $N$.




Figuren ser noe annerledes ut dersom $ABC$ har en stump vinkel, men resonnementet blir det samme.

**b.** La $Q$ være omsenteret til $DEF$. Vi begynner med å vise at $Q = O$. Anta det motsatte. Siden $ABC$ og dermed $DEF$ er spissvinklet ligger $Q$ innenfor $DEF$. At $O$ også ligger innenfor $DEF$ følger direkte av konstruksjonen. Så dersom $Q \neq O$, må $Q$ ligge i en av trekantene $DEO$, $EFO$ eller $FDO$. Anta den ligger innenfor $DEO$ (se figuren). Da er $\angle DQE < \angle DOE$. Men $\angle DQE = 2\angle DFE$, siden de er periferi- og sentralvinkel til buen $DE$ i omsirkelen til $DEF$. Tilsvarende er $\angle DOE = \angle BOA = 2\angle BCA$. Altså er $\angle DFE < \angle BCA$, som er i motstrid med antagelsen om at $DEF$ og $ABC$ er likeformet. Vi får tilsvarende motsigelser om vi antar at $Q$ ligger i en av trekantene $EFO$ eller $FDO$, så vi må konkludere at $Q = O$.






Nå vet vi altså at $OD = OE = OF$. Så trekantene $DOE$ og $AOB$ har samme vinkel i $O$, og begge er likebente, så $\angle ODE = \angle OED = \angle OBA = \angle OAB$.

I tillegg er $OE = OD$ og $OA = OB$, siden $O$ er omsenter i begge trekantene. Til sammen er så $BE = AD$. De to trekantene $ABE$ og $BAD$ er dermed kongruente (to par like lange sider, og vinkelen mellom). Spesielt er $\angle BAE = \angle ABD$, med andre ord $\angle BAC = \angle ABC$. På samme måte blir $\angle ABC = \angle BCA$, så trekanten $ABC$ har like vinkler, og er derfor likesidet.

**Oppgave 4.**

**a.** Åpenbart er ikke $P$ nullpolynomet $P(x) = 0$. La $n$ være graden til polynomet $P$. Skriv $Q(x) = x^n P(1/x)$, så er også $Q$ et polynom, med konstantledd $Q(0) \neq 0$. Den gitte ligningen kan skrives om til

$$\big(1 + P(x)\big)\, Q(1 + x) = (1 + x)^n.$$

Siden graden til et produkt av polynomer er lik summen av gradene, følger at $Q$ har grad 0, det vil si $Q(x) = c$ for en konstant $c$. Det følger at $P$ har formen $P(x) = cx^n$. Innsatt i ligningen over gir det

$$(1 + cx^n) \cdot c = (1 + x)^n.$$

Dersom $n \geq 2$ er $(1 + x)^n = 1 + nx + \cdots + x^n$, så ligningen kan ikke holde. Vi står igjen med to muligheter: Den første er $n = 0$, $(1 + c)c = 1$, og $P(x) = c = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$. Den andre er $n = 1$ og $(1 + cx)c = 1 + x$, som gir $c = 1$ og $P(x) = x$.

*Alternativ løsning, for de som kjenner til grenser og kontinuitet*: Som i den første løsningen, merk at det finnes to løsninger med $P(x)$ konstant. Så anta at $P(x)$ ikke er konstant. Da vil $|P(x)|$ gå mot uendelig når $|x|$ går mot uendelig. Siden polynomer er kontinuerlige, følger at $P(0) = 0$.

For å komme videre, er det lurt å se at likheten i oppgaven har formen $P\big(g(x)\big) = g\big(P(x)\big)$, der $g(x) = 1/(1 + x)$. Når $a$ er slik at $P(a) = a$, kalles $a$ et fikspunkt for $P$. Og når det er tilfelle, følger at $P\big(g(a)\big) = g\big(P(a)\big) = g(a)$, det vil si $g(a)$ er *også* et fikspunkt for $P$. Nå kan vi anvende det på $a = 0$, og konkludere at også $g(0) = 1$, $g(1) = \frac{1}{2}$, $g(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$, og så videre, alle er fikspunkter til $P$-Forutsatt at alle disse er distinkte, har derfor $P$ uendelig mange fikspunkter, eller med andre ord polynomet $P(x) - x$ har uendelig mange nullpunkter, så det må være nullpolynomet, og dermed er $P(x) = x$ for alle $x$.

For å sjekke at alle fikspunktene vi har funnet er distinkte, la $a_1 = 0$ og $a_{i+1} = 1/(1 + a_i)$ for $i = 1, 2, \ldots$. Skriv $a_i = e_i/f_i$, der $e_i$ og $f_i$ er innbyrdes primiske positive heltall (unntatt for $i = 1$ – vi setter $e_1 = 0$ og $f_0 = 1$). Litt enkel brøkregning gir $e_{i+1}/f_{i+1} = 1/(1 + e_i/f_i) = f_i/(e_i + f_i)$, så vi skal ha $e_{i+1} = f_i$ og $f_{i+1} = e_i + f_i$. (Vi må sjekke at $e_{i+1}$ og $f_{i+1}$ er innbyrdes primiske: Men det følger av at $e_i$ og $f_i$ er innbyrdes primiske, og et enkelt induksjonsargument viser at det gjelder alle $i$.) Følgen $f_1, f_2, \ldots$ blir altså 1, 1, 2, 3, 5, 8, …, som du kanskje gjenkjenner som *Fibonaccitallene*. For oss er det viktigste at følgen er økende: $f_{i+1} > f_i$ når $i > 1$, så alle $f_i$ (unntatt de første to) er forskjellige, og dermed er alle fikspunktene $a_i$ forskellige.

*Snarvei for den som kjenner til komplekse tall og algebraens fundamentalsetning:* Identiteten i oppgaven må også holde for komplekse tall. Det følger at $P(1/(1 + x)) \neq 0$ for alle komplekse tall $x \neq -1$. Men det betyr at $P$ ikke har noen komplekse nullpunkt forskjellig fra 0, slik at $P$ har formen $P(x) = cx^n$. Følg så siste del av den første løsningen.

**b.** Den gitte ligningen kan skrives om ved å sette brøkene på fellesnevner. Vi flytter litt rundt på konstantene samtidig:

$$\frac{x^2 + (2y)^2 + (3z)^2}{x(2y)(3z)} = 4.$$

Om vi setter $X = x$, $Y = 2y$ og $Z = 3z$, så spørres det altså etter det største reelle tallet $C$ slik at

$$\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{XYZ} = 4 \Rightarrow \frac{YZ + ZX + XY}{XYZ} \geq C. \tag{1}$$

Når $(X, Y, Z)$ oppfyller denne betingelsen, så er $XYZ > 0$, og vi må også ha

$$4(YZ + ZX + XY) \geq C(X^2 + Y^2 + Z^2). \tag{2}$$

Denne ulikheten må holde for *alle* $(X, Y, Z)$ med $XYZ > 0$, som vi ser ved å anvende (1) på $(aX, aY, aZ)$ med $a > 0$ passende valgt.

Omvendt, om (2) holder hver gang $XYZ > 0$, så gjelder også (1). Nå kan vi sette inn $2(YZ + ZX + XY) = (X + Y + Z)^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)$ på venstresiden i (2), og forenkle til

$$2(X + Y + Z)^2 \geq (C + 2)(X^2 + Y^2 + Z^2) \qquad \text{hvis } XYZ > 0$$

Dersom $C > -2$, er ikke dette alltid oppfylt: Velg for eksempel $X = 2$ og $Y = Z = -1$. Men for $C = -2$ er ulikheten åpenbart gyldig.