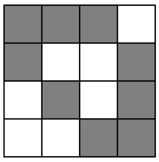
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
2005–2006. *Løsning*

Finale 9. mars 2006

Oppgave 1



(a) Hvis det er ti eller flere svarte ruter i tabellen, har den enten minst én rad med fire svarte ruter og minst én annen rad med minst to svarte ruter, noe som gir en svart kvartett, ellers har den minst to rader med tre eller flere svarte ruter. Men i disse to radene er det da en svart kvartett (to svarte ruter har samme posisjon i de to radene).

Så det er høyst ni svarte ruter i en tabell uten kvartetter. En tabell uten kvartetter med ni svarte ruter er vist i figuren. Så det største mulige antallet er ni.

(b) Hver rad har minst tre ruter av samme farge. Dermed forekommer en av fargene, for eksempel svart, i tre ruter (eller flere) i hver av tre rader (eller flere) – la oss si i rad 1, 2 og 3.

Hvis det ikke er kvartetter i rad 1 og 2, må to av de svarte rutene i rad 2 være i posisjoner der det ikke er svarte ruter i rad 1.

Hvis det ikke er kvartetter i rad 1 og 3, må på samme måte to av de svarte rutene i rad 3 være i posisjoner der det ikke er svarte ruter i rad 1.

Men det er høyst to posisjoner der det ikke er svarte ruter i rad 1. Dermed er det en kvartett i disse posisjonene i rad 2 og 3.

Oppgave 2

La $x = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2)}$ og $y = \sqrt{ab}$. Da er $2x^2 + 2y^2 = (a+b)^2$.

(a) Ulikheten kan skrives $\sqrt{2x^2+2y^2} \geq x + y$. Fra $(x-y)^2 \geq 0$ får vi $x^2 + y^2 \geq 2xy$, så $2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$. Tar vi kvadratroten på begge sider, får vi ulikheten.

(b) Ulikheten kan skrives $x + y \geq \frac{1}{3}(x^2+y^2)$. Fordi $a \leq 3$ og $b \leq 3$, er $x \leq 3$ og $y \leq 3$, slik at $3x \geq x^2$, og $x \geq x^2/3$. Tilsvarende vises at $y \geq y^2/3$, og ulikheten følger.

Oppgave 3

(a) Skjæringspunktenes x-koordinater tilfredsstiller andregradslikningen $x^2 + (ax + b)^2 = 5$, eller $(a^2 + 1)x^2 + 2abx + b^2 - 5 = 0$. Ved å bruke formelen for løsning av andregradslikning ser vi at summen av røttene er $-2ab/(a^2+1)$, som er et rasjonalt tall. Hvis den ene rota er rasjonal, er også den andre det. Fordi y-koordinatene er gitt ved $y = ax + b$, er også disse rasjonale.

(b) Punktet $(2, 1)$ ligger på sirkelen fra (a). Det fins uendelig mange linjer med rasjonale koeffisienter som går gjennom dette punktet og skjærer sirkelen i et annet punkt, som ifølge (a) har rasjonale koordinater.

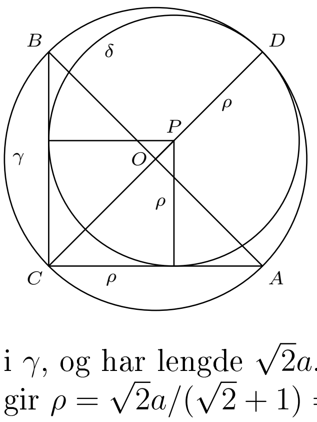
Det fins altså uendelig mange par (x, y) av rasjonale tall som er slik at $x^2 + y^2 = 5$. Ved å multiplisere begge sider med kvadratet av en fellesnevner for x og y, får vi et trippel (k_0, n_0, m_0) av hele tall som er slik at $k_0^2 + n_0^2 = 5m_0^2$.

Hvis k_0, n_0 og m_0 har noen felles primfaktorer, dividerer vi k_0, n_0 og m_0 med største felles divisor, slik at vi får henholdsvis k, n og m, som ikke har noen felles primfaktor. Da er $k^2 + n^2 = 5m^2$.

Fordi $x/y = k/n$, svarer forskjellige par (x, y) av rasjonale tall til forskjellige tripler (k, n, m) av heltall uten felles primfaktorer, og det er altså uendelig mange av dem.

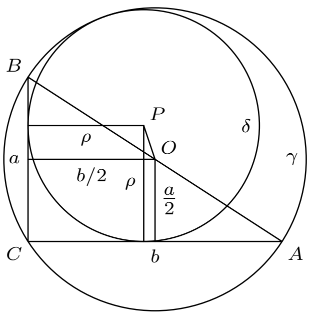
Oppgave 4

Merk at AB er en diameter i γ, fordi vinkelen C er rett.



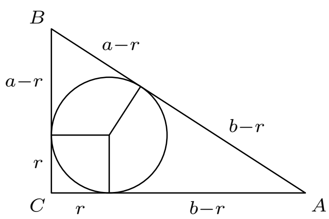
(a) La P være sentrum og ρ radius i δ. Fordi δ tangerer AC og BC, ligger P på halveringslinja til vinkelen C. Punktene P, C og de to tangeringspunktene mellom δ og AC og BC danner et kvadrat med side ρ der CP er diagonal, slik at $|CP| = \sqrt{2}\rho$.

Også sentrum O i γ ligger på halveringslinja til vinkelen C, fordi AC og BC har samme lengde. Tangeringspunktet D mellom sirklene ligger dermed også på halveringslinja til C, slik at CD er en diameter i γ, og har lengde $\sqrt{2}a$. Så $\sqrt{2}a = |CD| = |CP| + |PD| = \sqrt{2}\rho + \rho$, noe som gir $\rho = \sqrt{2}a/(\sqrt{2} + 1) = (2 - \sqrt{2})a$.



(b) La a, b og c være lengden av henholdsvis sidene BC, AC og AB. La igjen P være sentrum og ρ radius i δ. La O være sentrum i γ, som har radius $c/2$.

Høyden fra P og O til AC er henholdsvis ρ og $a/2$, mens høyden fra P og O til BC henholdsvis er ρ og $b/2$. Fordi γ og δ tangerer hverandre, har OP lengde $c/2 - \rho$. Ved å betrakte den lille rettvinklete trekanten med hypotenus OP (se figur), får vi $(c/2-\rho)^2 = (a/2-\rho)^2 + (b/2-\rho)^2$, som etter forenkling og utnyttelse av $c^2 = a^2 + b^2$, gir $\rho = a + b - c$.



La r være radius i den innskrevne sirkelen. Avstanden fra B til tangeringspunktet på AB er lik avstanden fra B til tangeringspunktet på BC, altså $a-r$. På samme måte er avstanden fra A til tangeringspunktet på AB lik $b-r$, slik at $a-r+b-r = c$, og $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$, altså halvparten av ρ.