Abel-konkurransen 1993

Oppgave 1

Dersom $1 - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x}$, er x lik

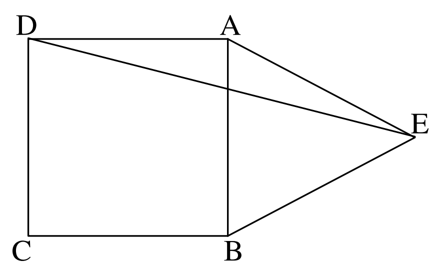
A) -2 B) -1 C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) 3

Oppgave 2

Et kvadrat endres til et rektangel ved at to sider økes med $p\%$ og de to andre sidene minkes med $p\%$. Arealet minker da med 1%. Verdien av p er da

A) $\dfrac{1}{2}$ B) 1 C) 5 D) 10 E) 11

Oppgave 3



På figuren er $ABCD$ et kvadrat mens ABE er en likesidet trekant. Da er $\angle AED$ lik

A) $10°$ B) $12\frac{1}{2}°$ C) $15°$
D) $20°$ E) $22\frac{1}{2}°$

Oppgave 4

Det største tallet av $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $3-\sqrt{6}$ og $1+\frac{1}{\pi}$ er

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt[3]{3}$ C) $3-\sqrt{6}$ D) $1+\frac{1}{\pi}$
E) To av dem er like store

Oppgave 5

Antall forskjellige reelle tallpar (x, y) som tilfredsstiller ligningene $x = x^2+y^2$ og $y = 2xy$, er

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Oppgave 6

Dersom $2x - y = 1$, $2y - z = 2$ og $2z - x = 3$, er $x + y + z$ lik

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Ingen av disse

Oppgave 7

Hvis $(3x-1)^7 = a_7x^7 + a_6x^6 + \cdots + a_1x + a_0$ for alle x, er $a_0 + a_1 + \cdots + a_6 + a_7$ lik

A) 7 B) 10 C) 64 D) -64 E) 128

Oppgave 8

Brøken $\dfrac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}{3\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}$ er lik

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B) 1 C) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{16}{9}$

Oppgave 9

Hvis $g(x) = 1 - x^2$ og $f(g(x)) = \dfrac{1-x^2}{x^2}$ for $x \neq 0$, er $f\left(\frac{1}{2}\right)$ lik

A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\sqrt{2}$ D) 3 E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Oppgave 10

Summen av de reelle løsningene av ligningen $x^2 + x + 1 = \dfrac{156}{x^2+x}$ er

A) 13 B) 6 C) -1 D) -2 E) Ingen av disse

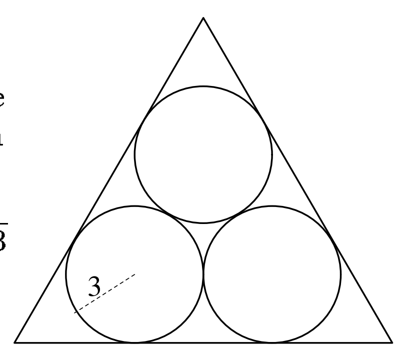
Oppgave 11

Den minste heltallige verdien til k slik at ligningen $x(k-x) = 4$ ikke har noen reell løsning, er

A) -5 B) -4 C) -3 D) 3 E) 0

Oppgave 12

På figuren tangerer de tre like store sirklene hverandre, og de tangerer trekantsidene. Dersom sirklenes radius er 3, er trekantens omkrets



A) $36 + 9\sqrt{2}$ B) $36 + 6\sqrt{3}$ C) $36 + 9\sqrt{3}$
D) $18 + 18\sqrt{3}$ E) 45

Oppgave 13

Fem dyr — A, B, C, D og E — er enten ulver eller hunder. Hunder sier alltid sannheten, mens ulver alltid lyver. A sier at B er en hund. C sier at D er en ulv. E sier at A er en hund. B sier at C er en ulv. D sier at B og E er av forskjellig art. Antall ulver er da

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

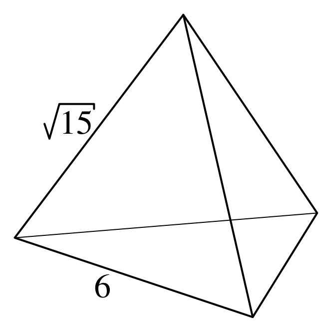
Oppgave 14

Dersom man tilsetter 1 liter vann til en syreblanding bestående av syre og vann, vil den nye blandingen inneholde 20% syre. Dersom man nå tilsetter 1 liter syre til den nye blandingen, vil den inneholde $33\frac{1}{3}\%$ syre. I den opprinnelige blandingen var konsentrasjonen av syre lik

A) 20% B) $22,5\%$ C) 24% D) 25% E) $26\frac{2}{3}\%$

Oppgave 15

En likesidet trekant med sider av lengde 6 er grunnflate i en pyramide med sidekanter som alle har lengde $\sqrt{15}$. Pyramidens volum er da



A) 9 B) 10 C) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ D) $\frac{9}{2}\sqrt{5}$
E) Ingen av disse

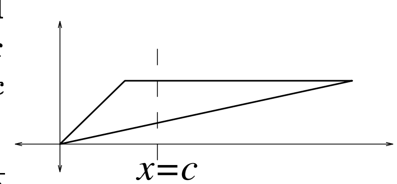
Oppgave 16

For a og n naturlige tall, la k være det største naturlige tall slik at $n > ka$. Hvis vi definerer $n \otimes a = n(n-a)(n-2a)\cdots(n-ka)$, er $\frac{72 \otimes 8}{18 \otimes 2}$ lik

A) 4^5 B) 4^7 C) 4^8 D) 4^9 E) Ingen av disse

Oppgave 17

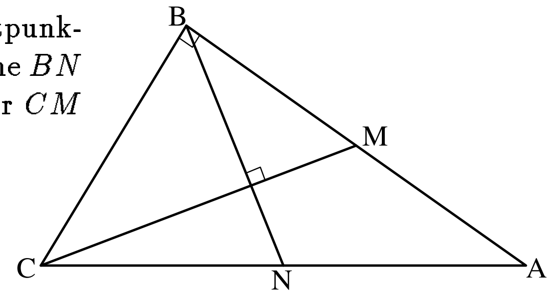
Linjen med ligningen $x = c$ deler trekanten med hjørner i $(0,0)$, $(1,1)$ og $(9,1)$ i to områder. For at de to områdene skal ha like stort areal, må c være lik



A) $\frac{5}{2}$ B) 3 C) $\frac{7}{2}$ D) $2\sqrt{3}$ E) $\sqrt{10}$

Oppgave 18

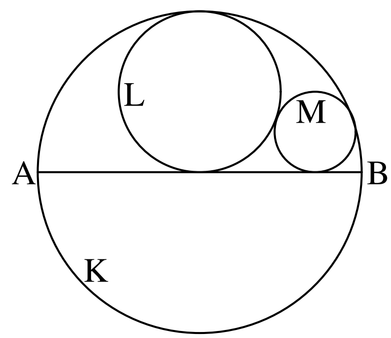
I den rettvinklede trekanten ABC der $\angle B$ er rett og $BC = 1$, er M og N midtpunktene på sidene AB og AC. Hvis linjene BN og CM står normalt på hverandre, er CM lik



A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ E) $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

Oppgave 19

AB er diameter i sirkelen K. Sirkelen L tangerer K og AB i sentrum av K. Sirkelen M tangerer K, L og AB. Forholdet mellom arealet av K og arealet av M er da lik



A) 12 B) 14 C) 16 D) 18
E) Ingen av disse

Oppgave 20

Hvis a, b og c er tre positive hele tall slik at $abc+ab+ac+bc+a+b+c = 1000$, er $a+b+c$ lik

A) 28 B) 43 C) 36 D) 42 E) 24