Telenor

Abel-konkurransen 1998–99

FINALE

11. mars 1999

Oppgave 1

a) Bestem en funksjon $f(x)$ slik at $f(t^2+t+1)=t$ for alle reelle tall $t \geq 0$.

b) Vis at for alle reelle tall a, b, c, d og e gjelder ulikheten

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e).$$

Oppgave 2

a) Finn alle hele tall m og n slik at $2m^2+n^2=2mn+3n$.

b) Det er gitt positive hele tall a, b og c slik at a^3 er delelig med b, b^3 er delelig med c, og c^3 er delelig med a. Vis at $(a+b+c)^{13}$ er delelig med abc.

Oppgave 3

La ΔABC være en likebent trekant med $AB=AC$ og $\angle A=30^\circ$. Trekanten er innskrevet i en sirkel med senter O. Punktet D ligger på sirkelbuen mellom A og C slik at $\angle DOC=30^\circ$. La G være punktet på sirkelbuen mellom A og B slik at $DG=AC$ og $AG<BG$. Linjestykket DG skjærer sidene AC og AB i henholdsvis E og F.

a) Vis at ΔAFG er likesidet.

b) Beregn forholdet mellom arealene $\Delta AFE/\Delta ABC$.

Oppgave 4

La S være mengden $\{1,2,3,\ldots,10\}$. For hver ikketom delmengde R av S definerer vi den alternerende summen $A(R)$ på følgende måte: Hvis $\{r_1,r_2,\ldots,r_k\}$ er elementene i R ordnet i stigende rekkefølge, så er den alternerende summen lik $A(R)=r_k-r_{k-1}+r_{k-2}-\cdots-(-1)^k r_1$, der $+$ og $-$ kommer annenhver gang. For eksempel er den alternerende summen til $\{1,3,4,7\}$ lik $7-4+3-1=5$.

a) Er det mulig å skrive S som en union av to ikkeoverlappende mengder som har samme alternerende sum?

b) La $\{R_1,R_2,\ldots,R_n\}$ være mengden av alle ikketomme delmengder av S. Beregn summen $A(R_1)+A(R_2)+\cdots+A(R_n)$.