Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2024-2025 – *Løsninger*

7. november 2024

Oppgave 1. $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})/\frac{1}{6} = \frac{3+2}{6} \cdot 6 = 5$. . . . . **E**

Oppgave 2. Tverrsummen av de tre tallene er $1+2+3+4 = 10$, $10+5 = 15$, $15+6 = 21$ og $21+7 = 28$. Av disse er bare de to midterste delelige med 3.

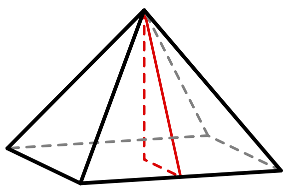
Tverrsummen er summen av sifrene i tallet. Ettersom $10 = 9+1$, $100 = 99+1$, $1000 = 999+1$ og så videre, kan vi trekke 9 ganger tiersifferet, 99 ganger hundresifferet, 999 ganger tusensifferet og så videre fra tallet og stå igjen med tverrsummen. Og da har vi trukket fra et multiplum av 3, så tallet er delelig med 3 hvis og bare hvis tverrsummen er delelig med 3. (Testen virker også for delelighet med 9).

Alternativ løsning: Siden $123 = 3 \cdot 41$, kan vi trekke fra henholdsvis 1230, 12300, 123000, 1230000 (alle multipler av 3) før vi sjekker delelighet med 3, og vi står igjen med 4, 45, 456 og 4567. Av disse er 4 ikke delelig med 3, men 45 er det, og derfor også $456 = 45 \cdot 10 + 6$, men ikke 4567 (for 4566 er). . . . **C**

Oppgave 3. Hvis Nils trekker 25 sokker, risikerer han å ende opp med 20 svarte og bare fem hvite sokker. Men trekker han 26 sokker, er han sikker, for blant de 26 sokkene er det høyst 20 svarte, så det er minst seks hvite. Og det er høyst 16 hvite, så det er minst ti svarte. . . . . **D**

Oppgave 4. $\sqrt{2^{16}} = 2^8 = 256$, fordi $(2^8)^2 = 2^{8\cdot 2} = 2^{16}$. **E**

Oppgave 5. La oss kvadrere noen av tallene: $A^2 = \frac{1}{8}$, $C^2 = \frac{1}{10}$, $D^2 = \frac{1}{16}$, $E^2 = \frac{1}{9}$. Av disse har A^2 den minste nevneren, så den er størst. Videre er $B = 0{,}33 < E = 0{,}3333\ldots < A$, så A er størst av alle. . . . . **A**



Oppgave 6. La x være halve lengden av sidekantene i pyramiden. En likesidet trekant med sidekant $2x$ har høyde $\sqrt{3}x$. En slik høyde er hypotenus i en rettvinklet trekant (se figuren) der en katet er x og den andre kateten er høyden i pyramiden. Pytagoras gir nå $x^2 + 10^2 = 3x^2$, så $x^2 = 50$. Hver sideflate har areal $x \cdot \sqrt{3}x = \sqrt{3}x^2 = 50\sqrt{3}$, mens grunnflaten har areal $4x^2 = 200$, så det totale arealet blir $200(1+\sqrt{3})$. . . . . **B**

Oppgave 7. Skriv p, q og r (med $p < q < r$) for barnas aldre henholdsvis for tre måneder siden, i dag, og om fem måneder. Ettersom tre barn ikke har mer enn tre fødselsdager i løpet av åtte måneder, er $r - p \leq 3$. Eneste trippel av primtall som alle er blant fire påfølgende tall, er $p = 2$, $q = 3$ og $r = 5$. Siden alle barna har fødselsdag i perioden fra for tre måneder siden til fem måneder frem i tid, og $8 + 3 < 12$, er summen av aldrene den samme om åtte måneder som om fem måneder, altså 5. (To av barna var ett år for tre måneder siden, mens det tredje barnet har hatt sin ettårsdag siden da. Og de to andre har fødselsdager i løpet av de neste fem månedene.) . . . . **A**

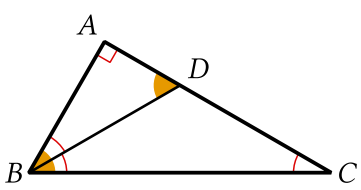
Oppgave 8. Spør i stedet: Hvor mange lapper kan du maksimalt trekke *uten* å ha tre som slutter på samme siffer? Svaret er 20 lapper: To som ender på 0, to som ender på 1, og så videre. Med 21 lapper er du sikker. . . . . **D**

Oppgave 9. Vi kan enkelt faktorisere de tre første tallene: $1313 = 13 \cdot 101$, $1919 = 19 \cdot 101$, og $7357 = 7 \cdot 1051$. Her er både 7, 13, 19 og 101 primtall, og 1051 er ikke delelig med 2, 3 eller 5, så minste primfaktor så langt er 7. (1051 er også et primtall, men det trenger vi ikke for løsningen.) Tallene i **D** og **E** er ikke delelige med hverken 2, 3, 5 eller 7: For 2 og 5 ser vi det av siste siffer, for 3 ser vi det ved å ta tverrsummen. Videre er $7537 = 7 \cdot 1001 + 530$ ikke delelig med 7, siden $530 = 53 \cdot 10$ ikke er det. For 11131 er det kan hende greiest å gjennomføre divisjonen med 7 og se at resten blir 1. . . . . **C**

Oppgave 10. Fordi $12n + 131 = 4(3n + 2) + 123$, er $12n + 131$ delelig med $3n + 2$ hvis og bare hvis også 123 er delelig med $3n + 2$. Men $123 = 3 \cdot 41$ med 3 og 41 primtall, så de eneste heltallene som går opp i 123 er 1, 3, 41 og 123 selv. Av disse har bare 41 formen $3n + 2$, og da med $n = 13$. . . . . **A**

Oppgave 11. Om katetene har lengde a og b er $a^2 + b^2 = 100$ (Pytagoras), mens $\frac{1}{2}ab = a + b + 10$. Om vi multipliserer den siste ligningen med 4 og legger til den første, får vi $(a+b)^2 = 4(a+b) + 140$, dermed $(a+b-2)^2 = 144$, slik at $a + b = 2 \pm 12$. Her må vi velge den positive løsningen: $a + b = 14$. . **C**

Oppgave 12. I lengdeforholdet $1 : 2 : \sqrt{3}$ kjenner vi igjen sidene i en 30–60–90-trekant, slik at $\angle ABC = 60°$, $\angle BCA = 30°$ og $\angle CAB = 90°$. Så er $\angle DBC = \angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC = 30°$, slik at trekanten BCD er likebent: $BD = CD$, mens også BDA er en 30–60–90-trekant. Dermed er $AD = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}CD$, så $AD = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. . . . . **D**



Oppgave 13. Det følger av antagelsene at $a + c = b + d = 1$, så produktet det spørres etter er bare $(a + b)(b + c)(c + d)$. Men vi har også $ac = bd = 0$, så $(a + b)(b + c)(c + d) = (ad + bc)(b + c) = b^2c + bc^2 = 2bc$, ettersom også $b^2 = b$ og $c^2 = c$. Om vi velger $a = d = 0$ og $b = c = 1$, ser vi at ingen av alternativene **A**, **B**, **C** eller **D** holder. . . . . **E**

Oppgave 14. Hvis Ingrid kjøpte b boller og m muffinser, må $13b+19m = 430$. Skriv det heller som $13s + 6m = 430$, der $s = b + m$ er tallet det spørres etter. Siden $430 = 6 \cdot 71 + 4$, må derfor $s = 6x + 4$ for et heltall x. (Detaljert: $s = 6 \cdot (71 - m - 2s) + 4$.) Vi må ha $13s \leq 430 = 13 \cdot 33 + 1$, altså $s \leq 33$. Likeledes er $19s \geq 430 = 19 \cdot 22 + 12$, så $s > 22$. Blant tallene på formen $s = 6x + 4$, oppfyller kun $s = 28$ begge ulikhetene. Vi kan sjekke svaret ved å regne ut $430 - 13 \cdot 28 = 66 = 6 \cdot 11$, så dette går opp. Ingrid kjøpte 11 muffinser og 17 boller. . . . . **E**

Oppgave 15. Om vi roterer sjakkbrettet 180 grader, kommer hvite ruter der det var hvite ruter fra før. Siste rute, med tallet 64, havner der første rute, med tallet 1, var. Summen av de to er 65. Det samme skjer med de neste hvite rutene: $3 + 62 = 65$, og så videre. Så to ganger summen er $32 \cdot 65$, og summen vi søker, er $16 \cdot 65 = 1040$.

Alternativ løsning: Del inn sjakkbrettet i mindre kvadrater, der hvert kvadrat er 2×2 ruter. I et slikt småkvadrat er summen av tallene i de to hvite rutene lik summen av tallene i de to svarte rutene, så tallene i de hvite rutene har samme sum som tallene i de svarte, og derfor halve summen av alle tallene på brettet, altså $\frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + \cdots + 64) = \frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 65}{2}) = 16 \cdot 65 = 1040$. . . . . **C**

Oppgave 16. La oss måle tid i timer fra midnatt, og vinkler med klokka fra rett opp. Ved tidspunkt t kan vi si at timeviseren står i vinkel $t \cdot 30^\circ$, og minuttviseren i vinkel $t \cdot 360^\circ$. (Vinkler større enn 360° kan reduseres til noe mellom 0° og 360° ved å trekke fra et heltallig multiplum av 360°, men her foretrekker vi å ikke gjøre det.) Vinkelen mellom de to viserne er så $t \cdot 360^\circ - t \cdot 30^\circ = t \cdot 330^\circ$, og viserne står vinkelrett på hverandre hver gang $t \cdot 330^\circ = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$ for et heltall n. Det skjer så hver $\frac{180}{330} = \frac{6}{11}$ time. I løpet av 24 timer har det skjedd $24/\frac{6}{11} = 44$ ganger.

Alternativ løsning: I løpet av ett døgn går minuttviseren 24 hele runder, og timeviseren to runder i samme retning. Det betyr at minuttviseren går $24 - 2 = 22$ runder sett fra timeviserens synspunkt. Den står vinkelrett på timeviseren to ganger per runde, i alt 44 ganger.

Mulig alternativ løsning: I hver time, fra og med helt klokkeslett til neste hele klokkeslett, står urviserne vinkelrett på hverandre to ganger. (Dette er sant, men er ikke fullt så opplagt som man skulle tro, ettersom det går litt over en halvtime mellom hver gang dette skjer.) Det skulle bli $2 \cdot 24 = 48$ ganger i alt i en 24-timers periode.. *Men* to ganger i hver 12-timers periode, nemlig klokka tre og ni, skjer det på hel time. Så disse to (fire om vi tar hele døgnet) er tatt med to ganger hver, så vi må trekke fra fire, og ender med 44 som svar. . . **D**

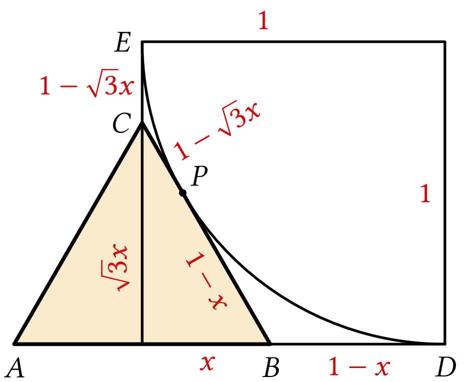
Oppgave 17. Ingen av de fire første alternativene er alltid rett. Her er moteksempler: **A**: $x = y = \frac{1}{2}$ ville gitt $0 + 0 = 1$. **B**: Det blir likhet dersom x og y begge er heltall. **C**: $x = \frac{1}{2}$ og $y = 2$ ville gitt $0 \cdot 2 = 1$. **D**: $x = y = -\frac{3}{2}$ ville gitt $(-2) \cdot (-2) \leq 2$. . . . . **E**

Oppgave 18. Skriv opp summen slik, og legg merke til at n'te rad kan skrives $n \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 9)$:

$$
\begin{aligned}
&\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 9 \\
&+ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 \\
&+ 3 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\
&+ \cdots \\
&+ 9 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + 9 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 9 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 9 \cdot 6 + 9 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 \\
&= (1 + 2 + \cdots + 9) \cdot (0 + 1 + 2 + \cdots + 9) = 45 \cdot 45 = 2025.
\end{aligned}
$$

. . . . **B**

Oppgave 19. De to kvartsirklene må være like store for å tangere slik det vises i figuren, så hver av dem har radius 1. Takket være symmetrien kan vi nøye oss med å studere den ene kvartsirkelen. La x være halve sidelengden i trekanten ABC. Da er høyden lik $\sqrt{3}x$. Siden sirkelen har radius 1, blir da $BD = 1 - x$ og $CE = 1 - \sqrt{3}x$. Nå benytter vi at om vi har et punkt utenfor en sirkel og trekker de to sirkeltangentene gjennom punktet, er de to tangeringspunktene like langt fra det gitte punktet. Dermed er $PB = BD = 1 - x$ og $PC = CE = 1 - \sqrt{3}x$. Nå har vi to mål på sidekanten BC: $2x = (1 - x) + (1 - \sqrt{3}x)$, som gir oss $(3 + \sqrt{3})x = 2$. Vi ganger med $\frac{1}{6}(3 - \sqrt{3})$ og får $x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Arealet av trekanten blir $\sqrt{3}x^2 = \sqrt{3}(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3}) = \frac{4}{3}\sqrt{3} - 2$.



. . . . **B**

Oppgave 20. Skriv R, G, B, S for verdien av henholdsvis den røde, grønne, blå, eller svarte terningen. Til hvert terningkast (R,G,B,S) kan vi tilordne et «motsatt» terningkast $(R',G',B',S') = (5-R, 21-G, 13-B, 13-S)$. Så er $R+G < B+S$ hvis og bare hvis $R'+G' > B'+S'$. (Dette gjelder fordi $5+21 = 13+13$.) Det er altså akkurat like mange terningkast med $R+G < B+S$ som det er terningkast med $R+G > B+S$.

La oss telle opp antall terningkast med $R+G = B+S = n$, for $n = 2, 3, \dots, 24$:

Ettersom $R'+G' = 26-(R+G)$ og $B'+S' = 26-(B+S)$, er antallet det samme for $n = 24, 23, \dots, 14$ som det er for $n = 2, 3, \dots, 12$.

For $n = 2, 3, \dots, 13$ har vi $n-1$ muligheter for (B,S) med $B+S = n$ (gitt ved $B = 1, 2, \dots, n-1$ og $S = n-B$).

Likeledes, for $n = 2, 3$ og 4 har vi $n-1$ muligheter for (R,G) med $R+G = n$; men for $n = 5, \dots, 13$ har vi bare fire muligheter (gitt ved $R = 1, 2, 3, 4$ og $G = n-R$).

Antall muligheter totalt for $R+G = B+S < 13$ er da $1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 4\cdot(4+5+\cdots+11) = 14 + 4\cdot 60 = 254$. Symmetrien mellom (R,G,B,S) og (R',G',B',S') gir oss da $2\cdot 254 = 508$ muligheter for $R+G = B+S \neq 13$. Legger vi så til $4\cdot 12 = 48$ muligheter for $n = 13$, har vi totalt 556 muligheter for $R+G = B+S$.

Alt i alt er det $4\cdot 20\cdot 12\cdot 12 = 80\cdot 144$ mulige utfall, og $80\cdot 144 - 556$ av disse har $R+G \neq B+S$. Av disse vil halvparten oppfylle $R+G < B+S$, i alt $40\cdot 144 - 278 = 5482$ utfall. . . . . **D**