Fire kort

Mål

Generelt: Søke etter mønster og sammenhenger. Gjennomføre undersøkelse og begrunne resultat. Utfordre elevene på å resonnere og kommunisere.

Spesielt: Finne alle kombinasjoner når de adderer to tall under ti etter gitte regler. Vurdere sjansen for at summen blir partall eller oddetall.

Gjennomføring

Forklar reglene for spillet.

- Bruk fire kort med verdi 1-4
- En spiller er A, en er B
- A blander kortene
- B trekker to kort
- A vinner om summen er partall
- B vinner om summen er oddetall
- Spill minst 10 ganger **uten å bytte rolle som A og B**
- Noter resultatet for hver gang.

Elevene spiller to og to. Må noen være tre sammen, får den tredje oppgaven med å notere poeng. Læreren går rundt og sjekker at alle har forstått reglene og stopper spillet når alle har spilt minst ti omganger. I oppsummeringen begrunner elevene hvorfor de synes at spillet er rettferdig eller ikke.

Resultatene fra alle gruppene noteres på tavla. Diskuter fordelingen av poeng for A og B før elevene igjen skal vurdere om spillet er rettferdig og begrunne sine synspunkter. Etter at elevene har konkludert med at det er flere muligheter for å få oddetall enn partall, får de i oppgave på lage spillet rettferdig. De kan da velge fire av kortene med verdier 1-9.

Gjennomføring av opplegget tar 50 – 60 minutter.

Film

Filmen *Fire kort* er tatt opp Fosslia skole på Stjørdal. Astrid Bondø fra Matematikksenteret gjennomførte opplegget med elever på 6 trinn. Svein H. Torkildsen og Olaug L. Svingen fra Matematikksenteret filmet og stilte også spørsmål til elevene mens de arbeidet i par. To av elevene ble tatt med på et grupperom mens elevene arbeidet i par. Dette for å få et best mulig lydopptak av elevenes resonnering om spørsmålene knyttet til problemet.

Matematiske sammenhenger

Matematikken i denne aktiviteten er innen hovedområdet kombinatorikk og sannsynlighet.

Opplegget passer best i klasser som ikke har mye erfaring med å søke etter mulige kombinasjoner, men bare vil vurdere rettferdigheten ut fra det de har erfart når de spiller. Normalt vil B vinne selv om vi bare blander og trekker kortene 10 ganger. Ofte vil det skje med knapp margin. Men med så få trekk kan det forekomme både at spillet ender uavgjort og at A vinner. Ser vi bare på resultatene fra 10-15 trekk, kan vi godt konkludere med at spillet er rettferdig. Men når resultatene fra alle gruppene i klassen samles, får elevene et bedre empirisk grunnlag for vurderingen sin. De fleste vil da kunne se at det er størst sjanse for at B vinner. Med dette utgangspunktet kan vi se effekten av de store talls lov som sier at jo flere forsøk vi gjør, jo større er sjansen for at vi får et resultat som ligger tett opp til den teoretiske sannsynligheten – om den kan beregnes.

Den teoretiske sannsynligheten for summen av de to kortene kan vi finne med en systematisk gjennomgang av mulige kombinasjoner. En systematisk undersøkelse av mulige kombinasjoner kan gjøres på to måter:

12 kombinasjoner: 1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4, 1 + 4 = 5, 2 + 1 = 3, 2 + 3 = 5, 2 + 4 = 6, 3 + 1 = 4, 3 + 2 = 5, 3 + 4 = 7, 4 + 1 = 5, 4 + 2 = 6, 4 + 3 = 7.

Seks kombinasjoner: 1 + 2 = 3, 1 + 3 = 4, 1 + 4 = 5, 2 + 3 = 5, 2 + 4 = 6, 3 + 4 = 7

Av de 12 kombinasjonene gir åtte oddetall og fire gir partall. Siden det her er snakk om utvalg uten tilbakelegging – en verdi kan kun velges en gang – er det tilstrekkelig å undersøke de seks kombinasjonene. Vi trenger altså ikke ta med 2 + 1 siden vi allerede har undersøk 1 + 2.

I andre tilfelle må begge kombinasjonene regnes med. Det gjelder for eksempel når vi skal undersøke sannsynligheten for ulike summer av kast med to terninger. Da har vi utvalg med tilbakelegging. Om vi kaster en rød og en grønn terning, er det forskjell på om den røde terningen gir 1 og den grønne 2, eller motsatt. En ener og en toer kan vi få på to måter. Det er to forskjellige utfall som vil fylle hver sin rute i tabellen. Men er det samme verdi på begge terningene fyller vi bare ei rute i tabellen som viser alle utfallene. Disse utfallene er markert med gult i tabellen.

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Et rettferdig spill kan lages ved å bytte ut for eksempel 1-eren med 6-eren. Det kan vi se ved å sette opp de seks mulige kombinasjonene og se at tre av summene er partall og tre er oddetall. Da har vi vist ett tilfelle av et rettferdig spill. Vi kan gå videre og argumentere for at vi får et rettferdig spill uansett, bare vi velger ett oddetall og tre partall slik den ene jenta i filmen gjorde. Rettferdigheten ligger altså ikke i disse fire spesielle verdiene (2-6). Dette argumentet kan også uttrykkes i det matematiske symbolspråket. Når vi velger ett oddetall og tre partall har vi fire tall som kan skrives slik: $2a + 1$, $2b$, $2c$ og $2d$. Ser vi nå på de seks kombinasjonene, får vi: $2a + 1 + 2b = 2(a + b) + 1$ (oddetall), $2a + 1 + 2c = 2(a + c) + 1$(oddetall), $2a + 1 + 2d = 2(a + d) + 1$ (oddetall), $2b + 2c = 2(b + c)$ (partall), $2b + 2d = 2(b + d)$ (partall), $2c + 2d = 2(c + d)$ (partall).

Tilsvarende begrunnelse på tre nivåer kan vi også bruke for at spillet blir rettferdig om vi har tre oddetall og ett partall, og at det blir urettferdig med to partall og to oddetall.

Erfaringer fra utprøving

Alle elevparene kom i gang med spillet etter introduksjonen. Elevene startet å spille, og noterte resultatene. Elevene ble samlet og måtte svare på om de mener dette er et rettferdig spill og begrunne standpunktet sitt

Et interessant tilfelle ble observert hos de to jentene som ble filmet. De observerte raskt at det var flest kombinasjoner som ga oddetall til svar, og at det dermed var størst sjans for at B ville vinne. Da B vant, konkluderte hun med at spillet var rettferdig, fordi det stemte med sannsynligheten. Dette reiser spørsmål om hva elevene legger i begrepet rettferdig. Hva legger de til grunn for at spillet skal være rettferdig?

Grupper som allerede under utprøvingen har sett på mulige kombinasjoner av de fire kortene og konkludert med at spillet er urettferdig, har under oppsummeringen kun fått si at de synes spillet er urettferdig og i noen tilfelle også at det er flest kombinasjoner som gir oddetall. Vi har ønsket at alle elevene skal få den samme erfaringen med å undersøke alle mulige kombinasjoner, og har på dette tidspunktet holdt igjen med hvordan man kan finne ut det. Alle elevene skal få vurdere sitt standpunkt opp mot den informasjonen som ligger i klassens samlede resultat uten å kjenne til den teoretiske fordelingen.

I oppsummeringen noterte vi resultatene fra alle gruppene på tavla. Under utprøvingen har vi blant annet fått disse klasseresultatene:

A	2	5	4	4	6	4	5	3	3	**36**
B	13	7	10	14	4	6	11	8	11	**76**

A	10	7	11	12	9	4	5	4	4	8	**54**
B	5	22	17	25	5	4	5	6	6	9	**106**

A	6	5	1	6	9	11	6	13	**57**
B	8	8	12	10	10	16	8	14	**86**

A	2	4	9	8	3	4	7	**37**
B	11	7	10	15	12	8	9	**72**

Parene med A som vinner er markert med rød skrift. To uavgjort resultat er markert med grønn skrift. Legg ellers merke til at i tre av de fire eksemplene ligger klassens resultat nær opp til den teoretiske fordelingen.

Elevparene måtte deretter finne ut hvordan de kunne bevise at påstandene deres var riktige. Spørsmål vi stilte: *Hvordan kan du vise at det du tror stemmer? Hvordan kan du undersøke det?*

De fleste elevene brukte kortene systematisk når de skulle finne alle mulige kombinasjoner. De la to kort ved siden av hverandre og skrev regnestykket de fant. Så ble det ene kortet byttet ut og nytt regnestykke notert. Noen fikk tolv kombinasjoner. De fant først alle kombinasjoner med ettallet, deretter totallet osv. Andre fikk seks mulige kombinasjoner. De startet på samme måte, men da de kom til totallet, tok de ikke med 2 + 1, fordi de hadde den kombinasjonen fra før (1 + 2). I det ene tilfelle ville 8 av 12 kombinasjoner gi oddetall til svar, i det andre tilfelle ble resultatet 4 av 6. Dette problematiserte vi i oppsummeringa, og fikk elevene til å argumentere for at forholdene mellom oddetall og partall er likeverdige. På dette tidspunktet stilte vi også spørsmålet: Hvordan vet vi at vi har funnet alle løsningene?

Etter hvert skal elevene velge fire tall blant tallene 1 – 9, slik at sjansen for at summen partall eller oddetall er like stor. Her var det veldig stor forskjell på gruppene, med tanke på hvordan de angrep problemet. Alle mente det ikke var noen hensikt i å velge kortene 1 – 4, fordi det hadde vi gjort. Men det var flere grupper som valgte to andre partall og oddetall. Ei gruppe valgte det to ganger, før de konkluderte med at de kanskje måtte prøve noe annet. Noen grupper testet systematisk med alle mulige varianter. De valgte først fire partall, deretter fire oddetall, så ett partall og tre oddetall. Da de så at det ble riktig, var de ferdig. De så ikke umiddelbart at de også kunne teste ett oddetall og tre partall. Spørsmål vi stilte: Er dette eneste muligheten for å få like mange partall og oddetall til svar?

Her er det interessant å observere om elevene argumenterer ut fra eksempler, eller om de generaliserer. Noen elevpar snakket bare om de fire spesielle kortene de hadde valgt. Andre argumenterte med at det ble rettferdig med et oddetall og tre partall, og noen hadde funnet tre oddetall og ett partall. Ingen elevpar hadde begge mulighetene uten at de ble spesielt utfordret på det, som for eksempel jentene i filmen. Noen elevpar valgte tilfeldig fire kort og kunne da på ny prøve seg på to partall og to oddetall. Det blir en utfordring å utfordre disse parene uten å legge for sterke føringer på hva de skal gjøre. Vi må unngå traktmodellen for kommunikasjon. Se artikkelen Kommunikasjon.

Alle gruppene brukte kortene aktivt når de arbeidet med utforskingen. De fleste arbeidet veldig systematisk. De la kortene, skrev ned regnestykkene, noterte bak svarene hva som var par- og oddetall, og talte opp i etterkant. I en diskusjon mellom to jenter (se filmen *Fire kort*) argumenterer den ene på følgende måte. Med to partall og to oddetall er det størst sjans for å få oddetall. Ta for eksempel toeren. Det er bare en mulighet for å få partall (legger toeren inntil fireren), mens det er to muligheter for å få oddetall (legger toeren inntil henholdsvis eneren og treeren). Derfor er det dobbelt så stor sjanse til å få oddetall som partall. Hun sjekker ikke med et oddetall, for å se hvilke resultater det gir. Når de skal gjøre spillet rettferdig, velger de ut ett oddetall og tre partall (3-2-4-6), se *Notater fra noen av utprøvingene.* På spørsmål om dette var eneste mulighet for å få et rettferdig spill, blir de usikre og spør litt hva vi mener. Det er flere muligheter mener de, hvis de bytter ut med andre tall. Men de synes egentlig det blir det samme, siden de fremdeles velger å ha ett oddetall og tre partall. Etter samme spørsmål en gang til, kommer de fram til at de kan prøve ett partall og to tre oddetall.

Innspill elevene har kommet med

Etter spill med kortene 1-4

Etter at gruppene hadde spilt 10-20 ganger med kortene 1-4 fikk vi begrunnelser ut fra det begrensede erfaringsgrunnlaget elevene hadde. Hvis poengforskjellen var stor, sa noen elever at spillet var urettferdig og lette etter forklaringer. Men grupper med B som klar vinner mente også at det var rettferdig, for det er jo tilfeldig! Andre mente det var rettferdig, fordi de trakk blant to oddetall og to partall. Noen sa det var rettferdig, fordi de sjøl vant. De parene som fikk omtrent samme poeng på A og B, mente de at spillet var rettferdig.

Etter oppsummeringen

Etter oppsummeringen av spill med kortene 1-4 hadde elevene en større datamengde å vurdere ut fra. Elevene ble da på nytt spurt om de mente at spillet var rettferdig. De måtte komme med en påstand, og begrunne denne. Eksempler på påstander:

- Det er størst sjans for at B vinner, fordi det er flest kombinasjoner som blir oddetall.
- Det er størst sjans for at A vinner. Partall pluss partall blir partall, oddetall pluss oddetall blir partall, og partall pluss oddetall blir oddetall. Det er to muligheter for at svaret blir partall, men bare en mulighet for at det blir oddetall.
- Det er like stor sjans for at A og B vinner, fordi 1 og 3 er oddetall og 2 og 4 er partall.
- Egentlig bør P vinne, for P + P = P, O + O = P og P + O = O. Dobbelt så stor sjans for P!

Hvordan gjøre spillet rettferdig?

To gutter diskuterer:

- Vi kan ikke bruke bare partall, fordi da blir det alltid summen partall. Og da vinner A.
  Vi kan heller ikke bruke bare oddetall, for da blir alltid summen oddetall. Da vinner B.
- Nei, slik blir det ikke.
- Jo, B vinner hvis det er oddetall.
- Ja, men summen av to oddetall blir ikke oddetall. Se her: 1 + 3 er 4, og fire er et partall.
- Blir summen alltid partall da? Det må vi prøve. (sjekker med fire oddetall). Da vinner alltid A da.
  Vi har prøvd med to partall og to oddetall, det var ikke rettferdig.
- Da ble det flest oddetall til svar. Vi bytter ut et oddetall med et partall.

Notater fra noen av utprøvingene.

Eksempler på notater som stod igjen på Smart Board-tavlen etter oppsummering og utforsking av spillet med kortene 1-4.

Eksempel 1

A	2	5	4	4	6	4	5	3	3	36	1 2 3 4
B	13	7	10	14	4	6	11	8	11	76	Be best!

Det er større sjanse for at summen blir oddetall.

4 kan bare plusses med ett kort for å få partall, men det kan plusses med to kort for å få oddetall.

1+2=3	3+1=4
1+3=4	3+2=5
1+4=5	3+4=7
2+1=3	4+1=5
2+3=5	4+2=6
2+4=6	4+3=7

Eksempel 2

A	6	5	1	6	9	11	6	13	57
B	8	8	12	10	10	16	8	14	86

3+2
1+2
4+3
1+2 O

1+3
4+2 P

1 → 6
3 → 6
4 → 5
P → O

3+2=5 O	2+3 O	P	4
1+2=3 O	2+1 O	O	8
1+3=4 P	3+1 P		
1+4=5 O	4+1 O		
2+4=6 P	4+2 P		
3+4=7 O	4+3 O		

Eksempel 3

A	2	4	9	8	3	4	7	37
B	11	7	10	15	12	8	9	72

O + O = P | Egentlig bør P vinne
P + P = P | Dobbelt så mange!
P + O = O

1+2 1+4 2+3 3+4	O	4+2 3+1	P

Eksempel 4

A	10	7	11	12	9	4	5	4	4	8	54
B	5	22	17	25	5	4	5	6	6	9	106

1. Det er like stor sjanse for å få partall og oddetall 15
2. Det er størst sjanse for å få oddetall 6
3. Det er størst sjanse for å få partall 4

Eksempel på notat etter at elevene hadde laget rettferdig spill

Hvordan gjøre spillet rettferdig?

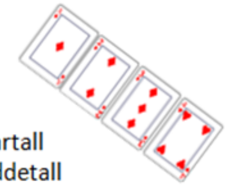
1-7-4-9 3 partall og 1 oddetall

4-6-8-7 1 partall og 3 oddetall

Undervisningsnotat

Mål: Finne alle kombinasjoner når de adderer to tall under ti etter gitte regler.
Vurdere sjansen for at summen blir partall eller oddetall.

- Bruk 4 kort med verdi 1-4
- En spiller er A, en er B
- A blander kortene
- B trekker to kort
- A vinner om summen er partall
- B vinner om summen er oddetall
- Spill minst 10 ganger **uten å bytte roller som A og B**
- Noter resultatet for hver omgang



Er spillet rettferdig? Begrunn svaret ditt!

Gjenta (og presisere): Du sier at…. Mener du at….
Repetere (og reformulere): Kan du gjenta med egne ord?
Vil du spørre «Nora» hva hun mente?
Resonnere: Er du enig eller uenig?
Hvorfor? Hva mener du om det? Hvorfor tror du det?
Tilføye: Har du noe å føye til?
Snu og snakk: Rask prat med sidemannen.

Progresjon for gjennomføring	**Planlagt retning for diskusjon**
Presentasjon av aktiviteten. Reglene gjennomgås og blir stående på tavla.	Se på et eksempel og sjekk hvem som får poeng, spiller A, spiller B eller begge. Diskuter partall, oddetall og sum.
To og to elever spiller og noterer resultatene. Elevene trekker minst ti ganger hver. Læreren observerer elevene mens de spiller.	Har elevene skjønt reglene? Hvilken notasjon bruker de? Kan den misforstås?
Felles diskusjon undervegs. *Er dette et rettferdig spill?* TENKETID. SNU OG SNAKK Hvert par svarer for seg, og begrunner svaret.	Hypoteser: Urettferdig fordi den ene har vunnet veldig mange ganger. Rettferdig fordi vi har vunnet like mange ganger. Urettferdig fordi det er flest summer som blir oddetall. Større sjans for å få oddetall enn partall. Dobbelt så stor sjans for at oddetall vinner.. Rettferdig fordi oddetall vant og det kunne vi forutse.
Registrer resultatene fra alle parene. Felles diskusjon: *Ser spillet rettferdig ut når vi ser alle resultatene under ett?* *Hvordan kan vi undersøke det?* Lærer observerer om elevene arbeider systematisk. Skriver de alle regnestykkene? Eksemplifiserer de eller generaliserer?	Overvekt av poeng til B (oddetall). *Påstand:* Det er størst sjans for å få oddetall. Undersøke summene av to og to tall. $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, osv. Uordnet utvalg uten tilbakelegging – 6 kombinasjoner Ordnet utvalg uten tilbakelegging – 12 kombinasjoner
Konklusjon: Det er størst sjanse for å få oddetallssum. Flest kombinasjoner gir oddetallssum.	Sammenligne eget resultat og klasseresultat med teoretisk sannsynlighet. Store talls lov. Jo flere hendelser, jo nærmere teoretisk sannsynlighet.
Presenter ny utfordring. Bruk kortene 1 – 9. *Kan man velge fire av kortene slik at spillet blir rettferdig? Kan det gjøres på flere måter?*	Lag hypotese. Sjekk mulighetene og trekk en konklusjon. Begrunn hvorfor det ikke er mulig med bare oddetall, eller bare partall. Begrunn hvorfor det går med ett partall og tre oddetall, eller omvendt. Snakker elevene om tallverdier eller om partall og oddetall?
Hvordan vet vi at vi har alle mulige summer? Oppsummere og avslutte aktiviteten.	Forventer at elevene sier noe om systematikk. Egenskaper hos partall og oddetall.